Q_6 : montrer que l'ensemble S est une sphère de centre $I(\alpha,\beta,\gamma)$ et de rayon R :

$$S : (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

méthode : $x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

exemple : $S : x^2+y^2+z^2-2x+4y-z-12=0$

$S : x^2-2x+y^2+4y+z^2-z-12=0$

$: (x-1)^2-1^2+(y+2)^2-2^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-12=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=17+\frac{1}{4}=\frac{69}{4}$

$S : (x-1)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{69}{4}}\right)^2$

donc S est la sphère de centre $I\left(1,-2,\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{69}{4}}$

exemple 2 : $S : x^2+y^2+z^2-8x+6y-1=0$.

$S : (x-4)^2-4^2+(y+3)^2-3^2+z^2=0$.

$S : (x-4)^2+(y+3)^2+z^2=26$.

la sphère de centre $I(4,-3,0)$ et de rayon $R=\sqrt{26}$

Q_7 : intersection entre un plan $P : ax+by+cz+d=0$ et une sphère $S(I,R)$:

on calcul $d(I,P)=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

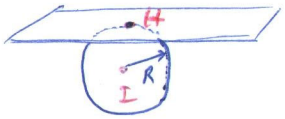
on a 3 cas :

1ère cas : si $d(I,P)>R$

donc $P \cap S = \phi$

2ème cas :

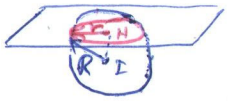
si $d(I,P)=R$



donc $S \cap P = \{H\}$

H est le projeté orthogonale de I sur P.

3ème cas : si $d(I,P)<R$



donc $S \cap P = \{\mathcal{C}(H,r)\}$

avec $r=\sqrt{R^2-d^2(I,P)}$

et pour déterminer $H(x_H,y_H,z_H)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{IH}=\alpha\vec{n} \\ H \in P \end{cases}$$

exemple : soit $P : 2x-2y-z+8=0$

$S(I,R)$; $I(1,1,1)$; $R=3$

déterminer $S \cap P$?

$$d(I,P)=\frac{|2-2-1+8|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{7}{3}<R=3$$

donc $S \cap P = \{\mathcal{C}(H,r)\}$

avec H est le projeté orthogonale de I sur P

et $r=\sqrt{R^2-d^2(I,P)}=\sqrt{3^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{32}{9}}$

déterminons $H(x_H,y_H,z_H)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{IH}=\alpha\vec{n} \\ H \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x_H-1 \\ y_H-1 \\ z_H-1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 2x_H-2y_H-z_H+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=2\alpha+1 \\ y_H=-2\alpha+1 \\ z_H=-\alpha+1 \\ 2(2\alpha+1)-2(-2\alpha+1)-(-\alpha+1)+8=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 9\alpha+7=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{7}{9}$

donc $x_H=2\left(-\frac{7}{9}\right)+1=-\frac{5}{9}$

$y_H=-2\left(-\frac{7}{9}\right)+1=\frac{23}{9}$

$z_H=\frac{7}{9}+1=\frac{16}{9}$

$H\left(-\frac{5}{9};\frac{23}{9};\frac{16}{9}\right)$.

Q_8 : Déterminer la surface (l'aire) et le volume :

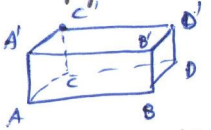
→ la surface d'un parallélogramme ABDC :

$$S=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$

→ la surface d'un triangle ABC :

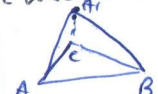
$$S=\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}$$

→ le volume d'un parallélépipède ABDCA'B'D'C' :



$$V=\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$$

→ le volume d'un tétraèdre : ABCA'



$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$$